

	<b>RO</b> : $\frac{A \rightarrow B}{\frac{A}{B}}$	<b>RP</b> : $\frac{A}{A[p_i/B]}$	
<b>RSH</b> : $\frac{\frac{A \rightarrow B}{B \rightarrow C}}{A \rightarrow C}$	<b>RKO</b> : $\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{B \rightarrow (A \rightarrow C)}$	<b>RIMP</b> : $\frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{A \wedge B \rightarrow C}$	<b>REXP</b> : $\frac{A \wedge B \rightarrow C}{A \rightarrow (B \rightarrow C)}$

1. Wykonaj następujące podstawienia:

- $s [s/t \leftrightarrow \neg p] =$
- $q [s/t \leftrightarrow \neg p] =$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) [q/s] =$
- $(s \rightarrow r) \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg s) [r/q \wedge \neg p] =$
- $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow (p \rightarrow r)) [r/p \wedge \neg q] =$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) [r/(p \wedge \neg q) \vee r] =$
- $(p \vee q) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg(p \vee r)) [p \vee q/t \leftrightarrow \neg s] =$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) [s/t \leftrightarrow \neg s] =$
- $q \rightarrow \neg p [p/p \rightarrow r] =$
- $\neg(t \vee s) \rightarrow \neg s [s/(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))] =$
- $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((q \rightarrow \neg r) \rightarrow (p \rightarrow r)) [p \rightarrow r/p \wedge \neg q] =$

2. Opisz wiersze dowodów<sup>1</sup>:

- $p \rightarrow p$** 
  - $p \rightarrow (q \rightarrow p)$  [Ax.1.]
  - $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$  [Ax.2.]
  - $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p))$
  - $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)$
  - $(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$
  - $p \rightarrow p$
- $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$** 
  - $p \rightarrow (q \rightarrow p)$  [Ax.1.]
  - $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$  [teza 16.]
  - $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$  [teza 25.]
  - $(p \rightarrow (\neg q \rightarrow p)) \rightarrow (((\neg q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)))$
  - $p \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$
  - $((\neg q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$
  - $(\neg q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$
  - $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$

<sup>1</sup>Przykłady (i numery tez) pochodzą z podręcznika T. Batoga **Podstawy logiki**.

(c)  $(\mathbf{p} \rightarrow \neg \mathbf{p}) \rightarrow \neg \mathbf{p}$

1.  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$  [Ax.2.]
2.  $p \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$  [teza 26.]
3.  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$  [teza 16.]
4.  $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$  [teza 24.]
5.  $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$  [teza 19.]
6.  $(p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p))) \rightarrow ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)))$
7.  $p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p))$
8.  $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p))$
9.  $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p))) \rightarrow (((p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)))$
10.  $((p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p))$
11.  $(p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)$
12.  $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)$
13.  $((p \rightarrow \neg p) \rightarrow ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)$
14.  $(p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$

(d)  $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \leftrightarrow \neg(\neg \mathbf{p} \vee \neg \mathbf{q})$

1.  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$  [Ax.12.]
2.  $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$  [teza 66.]
3.  $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$  [teza 25.]
4.  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$  [Ax.13.]
5.  $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$  [teza 24.]
6.  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q))$  [Ax.14.]
7.  $(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q)$
8.  $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$
9.  $(\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow p \wedge q)$
10.  $\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow p \wedge q$
11.  $(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q))$
12.  $\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$
13.  $(\neg p \vee \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q))$
14.  $p \wedge q \rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
15.  $(p \wedge q \rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)) \rightarrow ((\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)))$
16.  $(\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q))$
17.  $p \wedge q \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

(e)  $(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}) \rightarrow (\neg \mathbf{p} \leftrightarrow \neg \mathbf{q})$

1.  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$  [teza 16.]

2.  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$  [Ax.13.]

3.  $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$  [Ax.3.]

4.  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$  [Ax.12.]

5.  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow p) \rightarrow (p \leftrightarrow q))$  [Ax.14.]

6.  $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$  [Ax.2.]

7.  $(q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

8.  $((p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \rightarrow (((q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)) \rightarrow ((p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)))$

9.  $((q \rightarrow p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)) \rightarrow ((p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q))$

10.  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$

11.  $((p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)))$

12.  $((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$

13.  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

14.  $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q))$

15.  $((p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)) \rightarrow$   
 $((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q))) \rightarrow ((p \leftrightarrow q) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)))$

16.  $((\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q))) \rightarrow ((p \leftrightarrow q) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)))$

17.  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q))$

18.  $((p \leftrightarrow q) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q))) \rightarrow (((p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)))$

19.  $((p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)) \rightarrow ((p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q))$

20.  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg p \leftrightarrow \neg q)$