

1. Wykaż, że następujące reguły zachowują prawdziwość w niepustej klasie struktur modelowych:

$$(a) \text{ } RR: \frac{A \rightarrow B}{\Box A \rightarrow \Box B}$$

$$(b) \text{ } RE: \frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$$

$$(c) \text{ } RSH: \frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

$$(d) \text{ } RIMP: \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{A \wedge B \rightarrow C}$$

$$(e) \text{ } RD_{\leftrightarrow}: \frac{A \rightarrow B, B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B}$$

2. Wykaż, że następujące formuły są prawdziwe w każdej niepustej klasie struktur modelowych (czyli że są tezami logiki  $\mathbf{K}$ ):

$$(a) \Box(p \rightarrow p)$$

$$(b) (\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$$

$$(c) (\Box p \wedge \Box q) \leftrightarrow \Box(p \wedge q)$$

$$(d) \Diamond p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Diamond p)$$

$$(e) \Diamond(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond q)$$

3. Dla każdej z poniższych formuł znajdź kontrmodel (model, w którym nie jest ona prawdziwa) w logice  $\mathbf{K}$ :

$$(a) \Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$$

$$(b) \Diamond(p \rightarrow p)$$

$$(c) (\Box p \rightarrow \Box q) \rightarrow \Box(p \rightarrow q)$$

$$(d) \Box p \rightarrow \Box \Box p$$

4. Wykaż, że formuła  $\Diamond(p \rightarrow \Box p)$  nie jest tezą systemu  $\mathbf{D}$  i zbuduj odpowiedni kontrmodel.

5. Wykaż, że w strukturze modelowej, w której w stosunku do każdego świata alternatywny jest co najwyżej jeden świat prawdziwa jest formuła  $\Diamond p \rightarrow \Box p$ .

6. Wykaż, że w strukturze modelowej, w której w stosunku do każdego świata alternatywny jest więcej niż jeden świat formuła  $\Diamond p \rightarrow \Box p$  nie jest prawdziwa.

7. Wykaż, że jeżeli formuła  $\Diamond A$  jest prawdziwa w klasie wszystkich seryjnych struktur modelowych, to formuła  $A$  również jest prawdziwa w klasie takich struktur.