

Hughes, G. E., Cresswell, M. J. [1996]. *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London.

Priest, G. [2001]. *An Introduction to Non-Classical Logic*, Cambridge University Press, Cambridge.

System	Aksjomaty	Reguły
K	K + PC	RO, RP, RG, RZ
D	K + D + PC	RO, RP, RG, RZ
T	K + T + PC	RO, RP, RG, RZ
B	K + T + B + PC	RO, RP, RG, RZ
S4	K + T + 4 + PC	RO, RP, RG, RZ
S5	K + T + E + PC	RO, RP, RG, RZ

Aksjomaty	Reguły	Reguły wtórne
K: $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$	$RO: \frac{A \rightarrow B, A}{B}$	$RR: \frac{A \rightarrow B}{\Box A \rightarrow \Box B}$
D: $\Box p \rightarrow \Diamond p$	$RP: \frac{A}{A[p_i/B]}$	$RE: \frac{A \leftrightarrow B}{\Box A \leftrightarrow \Box B}$
T: $\Box p \rightarrow p$	$RG: \frac{A}{\Box A}$	$RSH: \frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$
B: $p \rightarrow \Box \Diamond p$	$RZ: \frac{B}{B[\neg \Box \neg A // \Diamond A]}$	$RIMP: \frac{A \rightarrow (B \rightarrow C)}{A \wedge B \rightarrow C}$
4: $\Box p \rightarrow \Box \Box p$		$RD_{\leftrightarrow}: \frac{A \rightarrow B, B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B}$
E: $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$		

1. Określ zbiory podformuł następujących formuł języka MRZ:

- $\Box \Box \Box p$
- $\Box \Diamond \neg \Box q$
- $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$
- $\Diamond(\Box(p \wedge \neg \Box q) \vee \neg r) \leftrightarrow (\Box \neg(\Box s \rightarrow r))$

2. Opisz wiersze następującego dowodu formuły $\Box p \rightarrow \Diamond p$ w rachunku T.

- $\Box p \rightarrow p$
- $\Box \neg p \rightarrow \neg p$
- $(\Box \neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg \Box \neg p)$
- $p \rightarrow \neg \Box \neg p$
- $p \rightarrow \Diamond p$
- $(\Box p \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow \Diamond p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond p))$
- $(p \rightarrow \Diamond p) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond p)$
- $\Box p \rightarrow \Diamond p$

3. Wykaż, że jest regułą wtórną w K reguła następująca:

$$\frac{A \rightarrow B}{\Diamond A \rightarrow \Diamond B}$$

korzystając z: prawa transpozycji, RR, i RZ.

- Udowodnij w T formułę $p \rightarrow \Diamond p$, korzystając, oprócz aksjomatu T, z RP, prawa transpozycji, prawa podwójnego przeczenia, RSH i RZ.
- Udowodnij w D formułę $\Diamond(p \rightarrow p)$ (zaczynij od prawa tożsamości: $p \rightarrow p$).
- Udowodnij w K formułę $\Box(p \rightarrow q) \wedge \Box(q \rightarrow r) \rightarrow \Box(p \rightarrow r)$ (skorzystaj z tezy: $\Box p \wedge \Box q \rightarrow \Box(p \wedge q)$).
- Niech T* będzie modalnym rachunkiem zdań różniącym się od T tym, że zamiast aksjomatu K zawiera on następujący aksjomat K*: $\Box(\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q))$, a zamiast RG – regułę RR (jako regułę pierwotną). Wykaż, że zbiory tez rachunków T* i T są identyczne.