1. Niech $\mathcal{M}$ będzie interpretacją języka KRP której uniwersum jest zbiór całkowitych liczb dodatnich $\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ i taką, że jej funkcja denotowania przyporządkowuje symbolowi predykatowemu P_1^2 relację niewiększości.

   (a) Czy $\mathcal{M} \models P_1^2(x_2, x_3)$?
   (b) Czy $\mathcal{M} \models \exists x_2 P_1^2(x_2, x_3)$?
   (c) Czy $\mathcal{M} \models \exists x_2 \exists x_3 P_1^2(x_2, x_3)$?
   (d) Czy $\mathcal{M} \models P_1^2(x_3, x_3)$?

   Jak będą brzmiały odpowiedzi na te pytania, jeżeli funkcja denotowania przyporządkuje symbolowi predykatowemu P_1^2 relację mniejszości?

2. Niech $\mathcal{M}'$ będzie interpretacją języka KRP różniącą się od interpretacji $\mathcal{M}$ z zadania 1. tym, że uniwersum interpretacji $\mathcal{M}'$ jest zbiór dodatnich liczb parzystych $\{2,\ 4,\ 6,\ \ldots\}$.

   (a) Podaj przykład formuły prawdziwej przy interpretacji $\mathcal{M}'$.
   (b) Podaj przykład formuły fałszywej przy interpretacji $\mathcal{M}'$.

3. Wskaż interpretację, przy której prawdziwe są następujące formuły:

   (a) $\forall x_4 P_2^2(x_4, x_4)$
   (b) $\forall x_4 \forall x_3 (P_2^2(x_4, x_3) \to P_2^2(x_3, x_4))$
   (c) $\forall x_4 \forall x_3 \forall x_7 (P_2^2(x_4, x_3) \wedge P_2^2(x_3, x_7) \to P_2^2(x_4, x_7))$

4. Jaką własność powinna posiadać formuła A, aby następujące warunki były równoważne:

   (a) $\mathcal{M} \models A$;
   (b) istnieje $\mathcal{M}$-wartościowanie, które (przy interpretacji $\mathcal{M}$) spełnia formułę A.

5. Czy jest możliwe, aby formuła zdaniowa języka I-go rzędu była prawdziwa przy jednej interpretacji tego języka, nie będąc prawdziwą przy innej? Dlaczego?

6. Czy o każdej formule zdaniowej pewnego języka I-go rzędu możemy powiedzieć, że przy pewnych interpretacjach tego języka jest ona prawdziwa, przy innych zaś nie? Dlaczego?

7. Udowodnij, że formuła $(P(x_1) \to Q(x_2)) \to (\neg Q(x_2) \to \neg P(x_1))$ jest prawdziwa przy każdej interpretacji.

8. Udowodnij, że formuła $P(x_1) \to \forall x_1 P(x_1)$ nie jest tautologią KRP.

9. Udowodnij, że formuła $P(x_8) \wedge \neg \exists x_3 P(x_3)$ nie jest spełnialna.

10. Niech $\mathcal{M}$ będzie dowolną interpretacją, a **s** — dowolnym $\mathcal{M}$-wartościowaniem.

    (a) Załóżmy, że $\mathcal{M} \models A \to B$ oraz $\mathcal{M} \models A$. Czy wówczas $\mathcal{M} \models B$?
    (b) Załóżmy, że $\mathcal{M} \models A \to B$ [**s**] oraz $\mathcal{M} \models A$ [**s**]. Czy wówczas $\mathcal{M} \models B$ [**s**]?
    (c) Załóżmy, że $\mathcal{M} \models A$ oraz term α jest podstawialny za zmienną x_i do formuły A. Czy wówczas $\mathcal{M} \models A[x_i/\alpha]$?
    (d) Załóżmy, że $\mathcal{M} \models A$ [**s**] oraz term α jest podstawialny za zmienną x_i do formuły A. Czy wówczas $\mathcal{M} \models A[x_i/\alpha]$ [**s**]?

    Jak w kontekście spełniania i prawdziwości zachowują się pozostałe reguły KRP?

11. Co to znaczy, że reguły KRP dziedziczą tautologiczność?

12. Udowodnij, że reguły O$\forall$, D$\exists$, RP dziedziczą prawdziwość.

13. Niech $\mathcal{M}$ będzie interpretacją, której uniwersum jest zbiór liczb całkowitych, i której funkcja denotowania przyporządkowuje predykatowi P relację większości. Formuła $\exists x_2 P(x_2, x_1)$ jest w tej interpretacji prawdziwa, ale formuła $\exists x_2 P(x_2, x_2)$, powstająca z poprzedniej wskutek zastosowania reguły RP — już nie. Jak to wyjaśnić?

14. Na czym polega adekwatność Klasycznego Rachunku Predykatów? Na czym polega jego pełność?

15. Podaj zasadnicze idee dowodu adekwatności KRP.

16. Rozstrzygnij, czy zachodzi wynikanie:

   (a) $\{P(x_5) \to Q(x_5), P(x_5)\} \models \forall x_5 Q(x_5)$
   (b) $\{P(x_6) \to (Q(x_5) \wedge R(x_7))\} \models \neg R(x_7) \to \neg P(x_6)$
   (c) $P(x_6) \to (Q(x_{13}) \wedge R(x_7)) \models \neg Q(x_5) \to \neg P(x_6)$
   (d) $\forall x_1 P(x_1, x_1) \models \forall x_{87} \exists x_6 P(x_6, x_{87})$
   (e) $\{\neg P(x_9), P(x_9)\} \models \forall x_5 Q(x_5)$
   (f) $\forall x_6 \exists x_4 P(x_6, x_4) \models \neg(P(x_6, x_4) \vee \neg P(x_6, x_4))$

17. Co to znaczy, że operacja konsekwencji (konsekwencji logicznej) nie wyprowadza poza zbiór formuł prawdziwych (przy danej interpretacji języka)?

18. Co to znaczy, że relacja wynikania logicznego jest (a) monotoniczna, (b) finitystyczna?

19. Załóżmy, ze zdanie B pewnego języka I-go rzędu wynika logicznie ze zdania A tego języka. Czy wówczas formuła $A \to B$ jest prawem logiki? Uzasadnij odpowiedź.

20. Wskaż $dom(A)$:

   (a) $A = (P(x_8, x_{13}) \to Q(x_1)) \wedge \exists x_2 P(x_2, x_2)$
   (b) $A = P(a_3, x_3)$
   (c) $A = \exists x_6 (\forall x_{256} P(x_{256}, x_6) \leftrightarrow Q(x_6))$

21. Udowodnij, że jeśli x_{i_n} jest zmienną wolną w formule A, zaś $\mathcal{M}$ — dowolną interpretacją, to $\mathcal{M} \models A$ wtw $\mathcal{M} \models \forall x_{i_n} A$.

Na fakt podany w punkcie 21 powołamy się w dowodzie Lematu 5.1 (patrz Wykład 5).

Lemat 5.1: $\mathcal{M} \models A$ wtw $\mathcal{M} \models dom(A)$

Niech $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ oznaczają wszystkie (i tylko) zmienne wolne formuły A. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem wskaźnika n, tj. względem liczby tych zmiennych wolnych.
Przypadek wyjściowy: załóżmy, że $n = 0$, tzn. A ma najmniejszą możliwą liczbę zmiennych wolnych. Wówczas A jest zdaniem i, zgodnie z Definicją 5.4, $dom(A) = A$. Zatem $\mathcal{M} \models A$ wtw $\mathcal{M} \models dom(A)$.
Założenie indukcyjne: załóżmy, że dowodzona teza zachodzi dla $n - 1$, tj. dla formuł, które mają $n - 1$ zmiennych wolnych. Formuła $\forall x_{i_n} A$ posiada właśnie $n - 1$ zmiennych wolnych, zatem spełnia ona zależność:

$$\mathcal{M} \models \forall x_{i_n} A \text{ wtw } \mathcal{M} \models dom(\forall x_{i_n} A)$$

Ale $dom(\forall x_{i_n} A) = dom(A)$, zatem z założenia indukcyjnego:

$$\mathcal{M} \models \forall x_{i_n} A \text{ wtw } \mathcal{M} \models dom(A)$$

a stąd, i na mocy podanego wyżej faktu (punkt 21):

$$\mathcal{M} \models A \text{ wtw } \mathcal{M} \models dom(A)$$

cbdu.

Spośród stwierdzeń (a)–(d) należy wybrać wszystkie te (i tylko te) stwierdzenia, o których prawdziwości wolno wnosić na podstawie podanej informacji. (Zatem takie stwierdzenia, co do których wartości logicznej nie możemy mieć pewności, należy pominąć.) Proszę uważać – może się zdarzyć, że prawdziwe są wszystkie odpowiedzi lub że nie jest prawdziwa żadna.

1. Załóżmy, że formuła zdaniowa A jest spełniona przez pewne $\mathcal{M}$-wartościowanie **s** (przy interpretacji $\mathcal{M}$). Wówczas jest prawdą, że:

   (a) Jeśli A jest zdaniem, to A jest spełniona przez dokładnie jedno wartościowanie przy tej interpretacji.

   (b) Jeśli A jest zdaniem, to A jest prawdziwa przy tej interpretacji.

   (c) Jeśli A jest funkcją zdaniową, to A może być prawdziwa lub fałszywa przy interpretacji $\mathcal{M}$.

   (d) Jeśli A jest funkcją zdaniową, to inne wartościowania mogą spełniać lub nie spełniać formuły A.

2. Załóżmy, że formuła zdaniowa $A = \forall x_1 P^2(a, x_1)$ jest spełniona przez pewne $\mathcal{M}$-wartościowanie **s** (przy interpretacji $\mathcal{M}$). Czy wówczas:

   (a) Każde $\mathcal{M}$–wartościowanie spełnia formułę A.

   (b) Formuła A jest spełnialna.

   (c) Formuła zdaniowa A jest prawdziwa przy interpretacji $\mathcal{M}$.

   (d) Interpretacja $\mathcal{M}$ jest modelem jednoelementowego zbioru $\{A\}$.

3. Załóżmy, że formuła zdaniowa A wynika logicznie ze zbioru formuł X. Załóżmy też, że $\mathcal{M}$ jest dowolną interpretacją języka KRP. Czy wówczas:

   (a) Interpretacja $\mathcal{M}$ jest modelem zbioru $\{A\}$.

   (b) Jeśli $X \subseteq \mathbf{Vr}(\mathcal{M})$, to $\mathcal{M} \models A$.

   (c) Jeśli $\mathcal{M}$ jest modelem zbioru $\{A\}$, to $\mathcal{M}$ jest modelem zbioru X.

   (d) Jeśli $\mathcal{M}$ nie jest modelem zbioru X, to formuła A jest fałszywa przy interpretacji $\mathcal{M}$.

4. Załóżmy, że formuła zdaniowa $A = P^2(a, x_1)$ nie jest spełniona przez pewne $\mathcal{M}$–wartościowanie **s** (przy interpretacji $\mathcal{M}$). Czy wówczas:

   (a) $A \notin \mathbf{Vr}(\mathcal{M})$.

   (b) Formuła $dom(A)$ nie jest spełniona przez $\mathcal{M}$–wartościowanie **s**.

   (c) Formuła A jest fałszywa przy interpretacji $\mathcal{M}$.

   (d) Żadna interpretacja języka KRP nie jest modelem zbioru $\{A\}$.

5. Załóżmy, że formuła zdaniowa $A = P^2(x_1, x_2) \rightarrow P^1(a)$ nie jest spełniona przez pewne $\mathcal{M}$–wartościowanie **s** (przy interpretacji $\mathcal{M}$). Czy wówczas:

   (a) $A \notin \mathbf{Vr}(\mathcal{M})$.

   (b) Formuła zdaniowa A nie jest ani prawdziwa ani fałszywa przy interpretacji $\mathcal{M}$.

   (c) Formuła zdaniowa A jest fałszywa przy interpretacji $\mathcal{M}$.

   (d) Żadna interpretacja języka KRP nie jest modelem jednoelementowego zbioru $\{A\}$.

6. Załóżmy, że formuła zdaniowa A wynika logicznie ze zbioru formuł X. Załóżmy też, że $\mathcal{M}$ jest dowolną interpretacją języka KRP. Czy wówczas:

   (a) Interpretacja $\mathcal{M}$ jest modelem zbioru X.

   (b) Jeśli $\mathcal{M} \models X$, to $\mathcal{M} \models A$.

   (c) Jeśli $\mathcal{M} \models A$, to $\mathcal{M} \models X$.

   (d) Jeśli jakaś formuła ze zbioru X nie jest prawdziwa przy interpretacji $\mathcal{M}$, to nie wiadomo, czy formuła A jest prawdziwa przy interpretacji $\mathcal{M}$.

7. Niech $\mathcal{M}$ będzie dowolną interpretacją. Załóżmy, że formuła zdaniowa $A = P^2(x_{23}, x_{16})$ nie jest spełniona przez pewne $\mathcal{M}$–wartościowanie **s** (przy interpretacji $\mathcal{M}$). Czy wówczas:

   (a) Formuła zdaniowa A jest fałszywa przy interpretacji $\mathcal{M}$.

   (b) Istnieje takie $\mathcal{M}$–wartościowanie, które nie spełnia formuły zdaniowej $dom(A)$.

   (c) Formuła zdaniowa: $dom(A)$ nie jest ani prawdziwa, ani fałszywa przy interpretacji $\mathcal{M}$.

   (d) Niektóre interpretacje języka KRP nie są modelami jednoelementowego zbioru $\{A\}$.