Wnioskowania dedukcyjne: pojęcie wynikania

✍ Przypomnij sobie:
tabele prawdziwościowe spójników

WYNIKANIE

Ze zdania Z_1 **wynika** zdanie Z_2 wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. okres warunkowy, zbudowany ze zdania Z_1 jako poprzednika i zdania Z_2 jako następnika (tj. okres warunkowy postaci: „jeżeli Z_1 to Z_2") jest **prawdziwy**, oraz
2. prawdziwość tego okresu warunkowego opiera się na jakimś **związku** między tym, co głosi zdanie Z_1, a tym, co głosi zdanie Z_2.

Związek, o którym mowa w powyższej definicji, może mieć różny charakter:

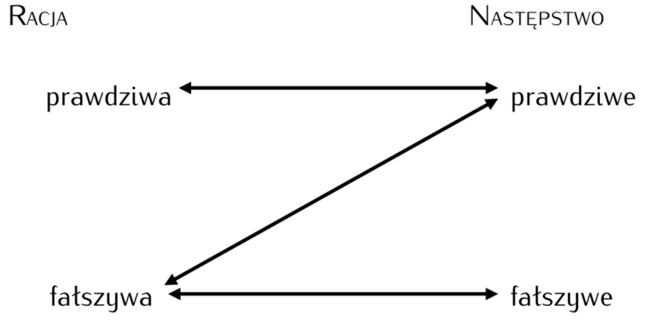
- przyczynowy (pewne zdarzenia są skutkami pewnych wcześniejszych zdarzeń);
- tetyczny (powstający z czyjegoś ustanowienia, pewne normy obowiązują z uwagi na to, że obowiązują pewne inne normy);
- strukturalny (powstający w wyniku określonego rozmieszczenia, np., przedmiotów w przestrzeni albo zdarzeń w czasie – w tym sensie ze zdania *Patrzę na Gwiazdę Polarną* wynika zdanie *Po lewej ręce mam zachód*);
- analityczny (oparty na samym tylko znaczeniu słów – w tym sensie ze zdania *Jaś jest kawalerem* wynika zdanie *Jaś nie jest żonaty*)

Jeśli ze zdania Z_1 wynika zdanie Z_2, to Z_1 nazywamy **racją** a Z_2 nazywamy **następstwem**. Związki prawdziwościowe pomiędzy racją a następstwem mogą wyglądać tak oto:

racja	następstwo
1	1
0	1
0	0

Zatem, jeśli ze zdania Z_1 (racji) wynika zdanie Z_2 (następstwo), to jeśli Z_1 jest prawdziwe, to Z_2 również musi być prawdziwe. Jeśli natomiast zdanie Z_1 (racja) jest fałszywe, to Z_2 (następstwo) może być zarówno prawdziwe, jak i fałszywe.

Prawdziwość racji przesądza o prawdziwości następstwa, natomiast fałszywość racji nie przesądza o wartości logicznej następstwa. Fałszywość następstwa przesądza o fałszywości racji.



WYNIKANIE LOGICZNE

Ze zdania Z_1 **wynika logicznie** zdanie Z_2 wtedy i tylko wtedy gdy okres warunkowy, zbudowany ze zdania Z_1 jako poprzednika i zdania Z_2 jako następnika (tj. okres warunkowy postaci: jeżeli Z_1 to Z_2) jest prawdą logiczną. **Prawdy logiczne** to zdania, których schematy są tautologiami.

Zdania Z_1 i Z_2 są **logicznie równoważne** wtedy i tylko wtedy, gdy wynikają logicznie z siebie nawzajem (z Z_1 wynika logicznie Z_2 i z Z_2 wynika logicznie Z_1).

Sprawdzanie, czy ze zdania Z_1 logicznie wynika zdanie Z_2 sprowadza się więc do zbadania tautologiczności pewnej formuły, a mianowicie implikacji o postaci:

$$A_1 \to A_2$$

gdzie A_1 jest schematem zdania Z_1 (racji), natomiast A_2 jest schematem zdania Z_2 (następstwa).
Aby sprawdzić, czy zdania Z_1 i Z_2 są logicznie równoważne, należałoby sprawdzić, czy tautologiami są obie implikacje:

$$A_1 \to A_2$$
$$A_2 \to A_1$$

bądź też, co na to samo wychodzi, czy tautologią jest równoważność:

$$A_1 \leftrightarrow A_2$$

Przykład 1.
Rozważmy dwa zdania:

(1) *Poznań jest miastem i Poznań nie jest miastem*

(2) *2+2=4*

Czy z (1) wynika logicznie (2)?

A więc:
I. Czy ze zdania *Poznań jest miastem i Poznań nie jest miastem* wynika logicznie zdanie *2+2=4* ?
II. Czy zdanie *Jeżeli Poznań jest miastem i Poznań nie jest miastem, to 2+2=4* jest prawdą logiczną?
II. Czy formuła $(p \wedge \neg p) \to q$ jest tautologią?

p	q	$\neg p$	$(p \wedge \neg p)$	$(p \wedge \neg p) \to q$
1	1	0	0	**1**
1	0	0	0	**1**
0	1	1	0	**1**
0	0	1	0	**1**

Widzimy zatem, że ze **zdania wewnętrznie sprzecznego** (np. *Poznań jest miastem i Poznań nie jest miastem*) wynika logicznie **dowolne** zdanie. Zdania wewnętrznie sprzeczne to zdania, których schematy są kontrtautologiami.

Przykład 2.
A teraz rozważmy następującą parę zdań:

(1) *2+2=4*

(2) *Poznań jest miastem lub Poznań nie jest miastem*

Czy z (1) wynika logicznie (2)?

A więc:
I. Czy ze zdania *2+2=4* wynika logicznie zdanie *Poznań jest miastem lub Poznań nie jest miastem*?
II. Czy zdanie *Jeżeli 2+2=4, to Poznań jest miastem lub Poznań nie jest miastem jest prawdą logiczną*?
III. Czy formuła $q \to (p \vee \neg p)$ jest tautologią?

p	q	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$q \to (p \vee \neg p)$
1	1	0	1	**1**
1	0	0	1	**1**
0	1	1	1	**1**
0	0	1	1	**1**

Widzimy zatem, że **prawda logiczna** (np. zdanie *Poznań jest miastem lub Poznań nie jest miastem*) wynika logicznie z **dowolnego** zdania.

Te „dziwne” zachowania relacji wynikania logicznego biorą się z własności prawdziwościowych spójnika implikacji:

- implikacja o fałszywym poprzedniku jest zawsze prawdziwa
- implikacja o prawdziwym następniku jest zawsze prawdziwa

WYNIKANIE ENTYMEMATYCZNE

Ze zdania A wynika zdanie B **entymematycznie** ze względu na zdanie C – zawsze i tylko wtedy, gdy – ze zdania A nie wynika logicznie zdanie B, ale z koniunkcji zdań A i C zdanie B logicznie wynika.
Przykład: ze zdania *Nemo jest rybą* zdanie *Nemo nie jest ssakiem* wynika entymematycznie, z uwagi na zdanie *Jeśli Nemo jest rybą, to nie jest ssakiem.*

SKRÓCONA METODA ZEROJEDYNKOWA

Sprawdzać tautologiczność formuł KRZ możemy na kilka sposobów. Budowanie tabel zerojedynkowych pozwala na pełne scharakteryzowanie prawdziwościowych własności formuł, ale bywa kłopotliwe – zwłaszcza, gdy w formule występuje kilka zmiennych zdaniowych.

Jeśli zależy nam nie na pełnej charakterystyce własności prawdziwościowych formuły, a tylko na stwierdzeniu, czy jest ona tautologią, czy nie – wystarczy nam zwykle coś skromniejszego niż cała tabela, mianowicie **jeden** jej **wiersz**.

Przykład:
Czy ze zdania: *Jeśli Anastazja poślubi Pierejaszyna, to popełni mezalians, zaś jeśli popełni mezalians, to zostanie wydziedziczona* [schemat zdania: $(p \to q) \wedge (q \to r)$] wynika logicznie zdanie: *Jeśli Anastazja poślubi Pierejaszyna, to zostanie wydziedziczona* [schemat zdania: $(p \to r)$]?

Czy formuła:
$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

jest tautologią?

Załóżmy, że **nie** – czyli że **istnieje** taki wiersz tabeli zerojedynkowej dla tej formuły, który kończy się zerem.

$$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$$

$$\mathbf{1} \quad \boxed{\mathbf{1} \neq 0} \quad \mathbf{0}$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1 \quad 0$$

$$1 \qquad\qquad 0$$

$$0$$

Nie znajdziemy takiej **niesprzecznej** kombinacji wartości zmiennych zdaniowych, dla której formuła $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$ byłaby fałszywa. Skoro tak, to jest ona zawsze prawdziwa – czyli jest **tautologią**.

W bardzo podobny sposób możemy sprawdzać, czy zadana formuła jest **kontrtautologią** – tyle, że wówczas całe rozumowanie rozpoczniemy od założenia, że istnieje kombinacja wartości zmiennych, dla której formuła ta jest **prawdziwa**.