Elementy Klasycznego Rachunku Zdań

✍ Przypomnij sobie:
czym zajmuje się syntaktyka i semantyka
co nazywamy *zdaniem w sensie logicznym*
czym są funktory

CZYM SĄ ZDANIA?

Zdanie w sensie logicznym to takie wyrażenie, które posiada wartość logiczną.

W Klasycznym Rachunku Zdań najmniejszymi „cegiełkami" są zdania proste, za pomocą spójników zdaniowych wiązane w zdania złożone. W języku KRZ występować zatem będą tylko symbole o tych dwóch kategoriach syntaktycznych: zdania i spójniki zdaniowe (funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych).

W KRZ jedyną semantycznie interesująca własnością zdań jest ich wartość logiczna, więc cała semantyka języka KRZ będzie się sprowadzała do manipulowania symbolami **0** i **1** – reprezentującymi, odpowiednio, Fałsz i Prawdę.

JĘZYK KLASYCZNEGO RACHUNKU ZDAŃ – SYNTAKTYKA

Definicja 1: **Symbolami** *języka KRZ nazywamy:*

(i) $p, q, r, \ldots$ (zmienne zdaniowe)

(ii) $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, /, \downarrow, \perp$ (spójniki zdaniowe)

(iii) $(,)$ (znaki techniczne – nawiasy)

[definicja ta ustala alfabet języka KRZ]

Definicja 2: **Wyrażeniem** *języka KRZ nazywamy każdy skończony ciąg symboli tego języka.*

Kilka przykładów wyrażeń języka KRZ:

- $ppppppppppppp\neg$
- $\neg(p \leftrightarrow q)$
- $(\neg)(\wedge)(\vee) \vee \vee /$

[definicja ta określa, w jaki sposób z symboli języka KRZ będziemy budować złożone całości]

Definicja 3: **Formuła** języka KRZ:

(i) *każda zmienna zdaniowa jest formułą języka KRZ;*

(ii) *jeżeli wyrażenie A jest formułą języka KRZ, to wyrażenie '$\neg A$' również jest formułą języka KRZ;*

(iii) *jeżeli wyrażenia A i B są formułami języka KRZ, to wyrażenia '$(A \vee B)$', '$(A \wedge B)$', '$(A \rightarrow B)$', '$(A \leftrightarrow B)$', '(A/B)', '$(A \downarrow B)$', '$(A \perp B)$' również są formułami języka KRZ;*

(iv) nie ma innych formuł zdaniowych języka KRZ oprócz zmiennych zdaniowych i tych wyrażeń, które można skonstruować zgodnie z punktami (ii) i (iii).

[definicja ta określa, które z wyrażeń – skończonych ciągów symboli – języka KRZ uznawać będziemy za gramatycznie poprawne]

Kilka przykładów formuł języka KRZ:

1. p [zmienna zdaniowa – pkt (i) definicji 3.]
2. q [j.w.]
3. $(\neg p)$ [z 1. i pkt (ii) definicji 3.]
4. $(\neg p \vee q)$ [z 3., 2. i pkt (iii) definicji 3.]
5. $(p \to (\neg p \vee q))$ [z 4., 1. i pkt (iii) definicji 3.]

JĘZYK KLASYCZNEGO RACHUNKU ZDAŃ – SEMANTYKA

Założenie dwuwartościowości: każde zdanie przyjmuje jedną i tylko jedną z dwóch wartości logicznych (0 albo 1).

Założeniu ekstensjonalności: wszystkie spójniki zdaniowe są spójnikami ekstensjonalnymi.

Zdaniowy **spójnik ekstensjonalny*** to spójnik zdaniowy który ma tę własność, że wartość logiczna zdania zbudowanego przy jego użyciu zależy wyłącznie od:
(i) charakterystyki prawdziwościowej spójnika oraz
(ii) wartości logicznych (-ej) jego argumentów (-u).

Żeby zdefiniować spójnik ekstensjonalny wystarczy zatem określić, jak wygląda wartość logiczna zdania złożonego przy jego użyciu, w zależności od wartości logicznych argumentów. Zbierzemy definicje interesujących nas spójników ekstensjonalnych:

$$\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow, /, \downarrow, \perp$$

w tzw. **tabelach prawdziwościowych** (matrycach spójników).

Negacja

- symbol: $\neg$
- symbole alternatywne: $-$, $\sim$
- prozą: „nieprawda że”

A	$\neg A$
1	0
0	1

Koniunkcja

- symbol: $\wedge$
- symbole alternatywne: &, $\bullet$
- prozą: „i”

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Alternatywa (zwykła, nierozłączna)

- symbol: $\vee$
- prozą: „lub”

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

*W odróżnieniu od **spójnika intensjonalnego**, w którego przypadku wartość logiczna zdania złożonego przy jego użyciu zależy od czegoś więcej niż tylko wartość logiczna argumentów. Spójnikiem intensjonalnym jest na przykład spójnik „wierzy, że” – dla wartości logicznej zdań „Jaś wierzy, że 2+2 = 4” i „Jaś wierzy, że Księżyc jest jedynym naturalnym satelitą Ziemi” istotny jest stan przekonań Jasia (a nie jest powiedziane, że Jaś musi wierzyć w każdą prawdę i nie wierzyć w żaden fałsz).

Alternatywa rozłączna

- symbol: $\perp$
- prozą: „albo ... albo ..."

A	B	$A \perp B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikacja

- symbol: $\rightarrow$
- symbole alternatywne: $\Rightarrow$, $\supset$
- prozą: „jeżeli ... to ..."

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Równoważność

- symbol: $\leftrightarrow$
- symbole alternatywne: $\Leftrightarrow$, $\equiv$
- prozą: „wtedy i tylko wtedy, gdy"

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Dysjunkcja

- symbol: /
- prozą: „co najwyżej jedno z dwojga"

A	B	A/B
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Binegacja

- symbol: $\downarrow$
- prozą: „ani ... ani ..."

A	B	$A \downarrow B$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

SCHEMATY ZDAŃ I METODA ZEROJEDYNKOWA

Żeby oszczędzić sobie nieco rysowania przyjmiemy następującą **konwencję co do opuszczania nawiasów**:

1. nie będziemy stawiać nawiasów zewnętrznych, wokół całych formuł;
2. przyjmiemy następującą hierarchię siły wiązania spójników:
   (a) $\neg$
   (b) $\wedge, \vee$
   (c) $\rightarrow, \leftrightarrow, /, \downarrow, \perp$

Przy budowaniu schematów zdań języka potocznego w języku KRZ obowiązują dwie proste zasady:

1. różne zdania proste reprezentujemy różnymi zmiennymi, te same – tymi samymi;
2. każdy spójnik ekstensjonalny, występujący w zdaniu, musi znaleźć swoją symboliczną reprezentację w schemacie zdania.

Z uwagi na 1. schematem zdania „Jak pada deszcz, to deszcz pada" będzie, np., formuła '$p \rightarrow p$', a nie '$p \rightarrow q$'.

Z uwagi na 2. schematem zdania „Jan nie pije, ale pali" jest, np., formuła '$\neg p \wedge q$', a nie formuła 'p' bądź '$p \wedge q$'.

Znając strukturę zdania i wartości logiczne zdań prostych, z których jest ono zbudowane, możemy ustalić wartość logiczną całości, korzystając z tzw. **metody zerojedynkowej**.

Kroki metody zerojedynkowej:

1. Dla danej formuły zdaniowej języka KRZ, wypisz wszystkie zmienne zdaniowe, które w niej występują. Każdą zmienną wypisz tylko raz.
2. Wypisz wszystkie kombinacje wartości logicznych dla zmiennych. Liczba kombinacji to 2^n, gdzie n to liczba zmiennych w całej formule (dla formuły zbudowanej z 2 zmiennych zdaniowych mamy więc 4 kombinacje, dla formuły zbudowanej z 3 zmiennych – 8 kombinacji).
3. Wypisz wszystkie podformuły, których wartości trzeba policzyć, a także całą formułę.
4. Policz wartości podformuł według matryc spójników. Zacznij od najmniej złożonych podformuł, a skończ na całej formule.

Przykład: tabela zerojedynkowa dla formuły $p \vee q \rightarrow \neg r$:

p	q	r	$\neg r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \neg r$
1	1	1			
1	1	0			
1	0	1			
1	0	0			
0	1	1			
0	1	0			
0	0	1			
0	0	0			

Kroki:

1. Wypisano 3 zmienne zdaniowe występujące w formule (są to: p, q i r – lewy, górny róg)
2. Wypisano 8 kombinacji wartości logicznych zmiennych (3 pierwsze od lewej kolumny, pod p, q i r)
3. Wypisano w górnym rzędzie wszystkie (dwie) podformuły ($\neg r$ oraz $p \vee q$) i całą formułę ($p \vee q \rightarrow \neg r$)

p	q	r	$\neg r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \neg r$
1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1

4. Dla obu podformuł (4. i 5. kolumna od lewej), a także całej formuły (ostatnia kolumna) policzono wartości logiczne dla danych w poszczególnych rzędach kombinacji wartości logicznych zmiennych zdaniowych. Korzystano z matryc dla następujących spójników (kolejno od lewej): negacji, alternatywy i implikacji.

Z uwagi na własności prawdziwościowe formuł języka KRZ wyróżnić możemy ich trzy rodzaje:

Tautologie, czyli formuły, które dla każdej kombinacji wartości logicznych zmiennych przyjmują wartość 1.

Kontrtautologie, czyli formuły, które dla każdej kombinacji wartości logicznych zmiennych przyjmują wartość 0.

Formuły syntetyczne - pozostałe.